Enunciados 2: persistencia para análisis de series de tiempo

Docentes: Jose Perea y Luis Scoccola, Northeastern University

Topología aplicada – Emalca 2021

1. Instrucciones generales

Código. Las preguntas están relacionadas al código en `Notebook_2.ipynb` que puede encontrarse en la página de la materia http://luisscoccola.github.io/emalca2021.

Cómo responder. Por favor responda a las preguntas de la siguiente sección. Trate de ser lo más preciso posible y, si no usa LaTeX para escribir sus respuestas, escriba lo más claro posible.

Cómo entregar el examen. *Al final del curso*, se deberá entregar *un solo archivo* con las respuestas a las preguntas en los Enunciados 1, 2 y 3, que se econtrarán en la página. La fecha límite para entregar las soluciones es 11:59pm del domingo 21 de noviembre, 2021. El mail deberá tener subject `examen topologia aplicada - [SU NOMBRE COMPLETO]`, y deberá ser enviado a `luis.scoccola[arroba]gmail.com`.

2. Preguntas de Análisis de series de tiempo

Fije $L \in \mathbb{N}$ y sea $f(t) = \sin(Lt)$ para $t \in \mathbb{R}$. Recurde que la ventana deslizante de f en t, con parámetros $d \in \mathbb{N}$ y $\tau > 0$, está dada por el vector

$$SW_{d,\tau} f(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t+\tau) \\ \vdots \\ f(t+d\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

El objetivo de este ejercicio es determinar d y τ óptimos, de tal forma que la nube de ventanas deslizantes

$$\mathbb{SW}_{d,\tau} f = \left\{ SW_{d,\tau} f(t) : t \in [0, 2\pi] \right\}$$

tenga persistencia máxima en dimensión 1. En otras palabras, queremos maximizar

$$mp = \text{máx} \left\{ b - a : (a,b) \in \mathsf{dgm}_1(\mathbb{SW}_{d,\tau} f) \right\} \tag{1}$$

Ejercicio 1. Si $f(t) = \sin(Lt)$, muestre que existen vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+1}$ tales que

$$SW_{d,\tau} f(t) = \sin(Lt)\mathbf{u} + \cos(Lt)\mathbf{v} \tag{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Hint: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

Ejercicio 2. Note que si los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son linealmente independientes, entonces la curva data por la ecuación (2) es una elipse planar. Cual es el mínimo valor que puede tomar d si queremos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean linealmente independientes?

Ejercicio 3. Trate de convencerse del siguiente hecho: de todas las elipses planares de perímetro fijo, el círculo es el que tiene 1-persistencia máxima (mp en ecuación (1)) más grande. Dado este hecho y $d \in \mathbb{N}$ fijo, determine valores de $\tau > 0$ de tal forma que la ecuación (2) describa un círculo (redondo).
Hint: Que valor debería tener el producto punto de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$? Como deberían ser sus longitudes? Las fórmulas para $\cos(2x)$ y $\sin(2y)$, y las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{d} \sin(2Lj\tau) &= \frac{\sin(L(d+1)\tau)\sin(Ld\tau)}{\sin(L\tau)} \\
\sum_{j=0}^{d} \cos(2Lj\tau) &= \frac{\sin(L(d+1)\tau)\cos(Ld\tau)}{\sin(L\tau)}
\end{aligned}$$

pueden ser útiles.